

一类捕食者具有流行病的时滞捕食系统定性分析

李冬梅, 张 凤, 宋颖伟

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 研究了一类捕食者具有流行病的时滞捕食 - 被捕食模型, 分析了边界平衡点的性质和全局稳定性, 给出疾病是否流行的阈值. 证明了当时滞 τ 适当小时, 正平衡点是局部渐近稳定的, 随着时滞的增加正平衡点由稳定变为不稳定, 系统在正平衡点附近发生 Hopf 分支.

关键词: 捕食 - 被捕食模型; 渐近稳定; 时滞; 阈值; Hopf 分支

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)05-0089-04

On the Qualitative Analysis of Delayed Predator-Prey Model with Epidemic in the Predator

LI Dongmei, ZHANG Feng, SONG Yingwei

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: A system of retarded functional differential equations is proposed as a predator-prey model with epidemic in the predator. The nature of boundary equilibria and global stability are analyzed. A threshold is identified which determines the outcome of the disease. This paper shows that positive equilibrium is locally asymptotically stable when time delay τ is suitable small, while a loss of stability by a Hopf bifurcation can occur as the delay increases.

Key words: predator-prey model; asymptotical stability; delay; threshold; hopf bifurcation

0 概 述

在现实世界中, 一个种群不可能孤立的存在, 它总会与其他种群存在着某种形式的相互作用. 当某种传染病在种群间流行时, 将会破坏它们之间的平衡状态. 因此, 生物种群之间传染病模型的研究具有非常重要的意义. 目前, 这方面的主要工作是针对捕食系统. 文 [1-3] 考虑了食饵按密度制约增长的捕食者有病的模型, 得到了疾病是否流行和两种群是否共存的阈值. 文 [4-5] 考虑了具有时滞的食饵有病的捕食 - 被捕食传染病模型, 得到了出现

Hopf 分支的条件.

本文将在文 [1] 模型的基础上考虑捕食者捕食食饵后不是立即增加捕食者的数量, 而是需要一段时间来消化食饵. 假设染病的捕食者不捕食食饵, 其模型为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= X(t) [a - bX(t)] - cX(t)S(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= eX(t-\tau)S(t) - d_1S(t) - \beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - d_2I(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

初始条件为

收稿日期: 2007-11-23

基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助项目 (A200502); 黑龙江省教育厅资助项目 (10051061)

作者简介: 李冬梅 (1962—), 女, 教授, E-mail: dmli_2004@yahoo.com.cn;

张 凤 (1982—), 女, 硕士研究生.

$$(\psi(\theta), \phi_1(\theta), \phi_2(\theta)) \in C_+ = ([-\tau, 0], R_+^3),$$

$$\psi(0) > 0, \phi_i(0) > 0, i=1, 2$$

其中: $X(t)$ 表示 t 时刻食饵的密度; $S(t)$ 、 $I(t)$ 分别表示 t 时刻易感类捕食者和染病类捕食者的密度; a 是食饵的内禀增长率; b 为密度制约系数; c 为捕食系数; e 为从食饵到捕食者的转化率, 且 $e \leq c$; d_1 、 d_2 分别表示易感类捕食者和染病类捕食者的死亡率, 且 $d_1 < d_2$; β 为接触率; τ 为捕食者种群的消化时间. 此模型假设这种传染病一旦染上就不再康复.

为简单起见, 将系统 (1) 做如下变换. 令 $x(t) =$

$$\frac{b}{a} X(t), s(t) = S(t), i(t) = I(t), \omega = \beta t \text{ 则系统}$$

(1) 变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) [1 - x(t)] - cx(t)s(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} &= Kex(t - \tau)s(t) - d_1s(t) - s(t)i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} &= s(t)i(t) - d_2i(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, 仍以 $a, c, e, d_1, d_2, K, \tau$ 表示 $\frac{a}{\beta}, \frac{c}{\beta}, \frac{e}{\beta}, \frac{d_1}{\beta}, \frac{d_2}{\beta}, \frac{a}{b}, \omega, \beta\tau$

鉴于生态意义, 本文只在 $R_+^3 = \{(x, s, i) \in R^3: x \geq 0, s \geq 0, i \geq 0\}$ 上讨论. 由文 [4] 可知, R_+^3 是系统 (2) 的正向不变集.

1 平衡点的稳定性和 Hopf 分支

1.1 平衡点的存在性

由系统 (2) 可解得如下的非负平衡点

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 0), \quad E_1 = (1, 0, 0), \\ E_2 &= \left(\frac{d_1}{Ke}, \frac{a(Ke - d_1)}{Kec}, 0 \right), \quad E^* = (x^*, s^*, i^*) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中:

$$x^* = \frac{a - cd_2}{a}, s^* = d_2, i^* = \frac{(a - cd_2)eK - ad_1}{a} \quad (4)$$

定理 1 由式 (3) 可得, 当 $0 < e < \frac{d_1}{K}$ 时, 系统

(2) 只有 E_0 和 E_1 两个平衡点; 当 $\frac{d_1}{K} \leq e < e^* \equiv$

$\frac{ad_1}{K(a - cd_2)}$ 时, 除 E_0, E_1 以外, 边界平衡点 E_2 出

现, 当 $e = \frac{d_1}{K}$ 时, $E_2 = E_1$; 当 $e^* \leq e \leq c$ 时, 除 E_0, E_1

和 E_2 以外, 正平衡点 E^* 出现, 当 $e = e^*$ 时, $E^* = E_2$.

1.2 平衡点的定性分析

设 $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$ 是系统 (2) 的平衡点, 则系统 (2) 的线性近似系统在 ϖ 处的特征方程为

$$\det \begin{pmatrix} a - 2\varpi_1 - \varpi_2\lambda & -\varpi_1 & 0 \\ K\varpi_1e^{-\lambda\tau} & K\varpi_1 - d_1 - \varpi_2\lambda & -\varpi_3 \\ 0 & \varpi_2 & (\varpi_2 - d_2) - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

当 $0 < e < \frac{d_1}{K}$ 时, 若 $\varpi = E_0$, 则式 (5) 可化为

$$(\lambda - a)(\lambda + d_1)(\lambda + d_2) = 0 \quad (6)$$

显然, 式 (6) 有一个正根, 两个负根, 因此, E_0 是一个鞍点.

同理, 若 $\varpi = E_1$, 式 (5) 有特征根 $-a, -d_2, Ke - d_1$, 则当 $e < \frac{d_1}{K}$ 时, 边界平衡点 E_1 是局部渐近稳定.

当 $\frac{d_1}{K} \leq e < e^*$ 时, 显然, E_1 是不稳定的. 若 $\varpi =$

E_2 , 则式 (5) 可化为

$$(\lambda - \lambda^*)f(\lambda) = 0$$

其中: $\lambda^* = \varpi_2 - d_2 = \frac{a - cd_2}{ec}(e - e^*)$, $f(\lambda) = \lambda^2 +$

$$\frac{ad_1}{Ke}\lambda + \frac{ad_1(Ke - d_1)}{Ke}e^{-\lambda\tau}.$$

由于 $f(0) = \frac{ad_1(Ke - d_1)}{Ke} > 0$, $f'(0) = \frac{ad_1}{Ke} > 0$,

由根与系数的关系可知 $f(\lambda) = 0$ 必有两个负实部的特征根. 因此, 只要 $\lambda^* < 0$, 即 $e < e^*$ 成立, 则疾病消除平衡点 E_2 是局部渐近稳定的. 当 $e > e^*$ 时, E_2 不稳定, 此时正平衡点 E^* 存在. 总结以上可得下面的定理.

定理 2 E_0 总是不稳定的鞍点. 当 $0 < e < \frac{d_1}{K}$

时, E_1 是局部渐近稳定的; 当 $\frac{d_1}{K} < e < e^*$ 时, E_1 是不稳定的, E_2 是局部渐近稳定的; 当 $e^* < e < c$ 时, E_2 是不稳定的, 此时 E^* 存在.

令

$$\sigma = \frac{Ke}{d_1}, \quad R_0 = \frac{e}{e^*} = \frac{Ke(a - cd_2)}{ad_1}$$

由定理 2 可知, 当 $\sigma < 1$ 时, 食饵数量趋于常数, 捕食者趋于绝灭; 当 $\sigma > 1$ 时, 易感捕食者存

在. 当 $R_0 < 1$ 时, 疾病消除平衡点 E_2 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 它不稳定, 此时正平衡点 E^* 存在, 即出现地方病. 因此, R_0 可看作系统 (2) 的一个阈值.

定理 3 如果 $R_0 > 1$ 且 $e < e_0$, 则存在 $\tau_0 > 0$, 当 $0 < \tau < \tau_0$ 时, 系统 (2) 的唯一地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的; 当 $\tau > \tau_0$ 时, E^* 不稳定; 当 $\tau = \tau_0$ 时, 系统 (2) 在平衡点 E^* 附近发生 Hopf 分支.

其中, $e_0 = \min \left\{ c, e^* + \frac{a(a - cd_2)}{2Kd_2} \right\}$.

证明: 首先, 证明在平衡点 E^* 处的特征方程 (5) 有一对纯虚根. 在 E^* 处式 (5) 可化为

$$\lambda^3 + ax^* \lambda^2 + s^* i^* (\lambda + ax^*) + Kecx^* s^* e^{-\lambda\tau} \lambda = 0 \quad (7)$$

当 $\tau = 0$ 时, 式 (7) 变为

$$\lambda^3 + ax^* \lambda^2 + (s^* i^* + Kecx^* s^*) \lambda + ax^* s^* i^* = 0 \quad (8)$$

由 Routh-Hurwitz 准则可知方程 (8) 的所有根都具有负实部, 即当 $\tau = 0$ 时, 正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的.

当 $\tau \neq 0$ 时, 设 $\lambda = \omega, \omega > 0$ 是式 (7) 的一个根, 将其代入式 (7) 并分离实、虚部得

$$\left. \begin{aligned} Kecx^* s^* \omega \cos \omega \tau &= \omega^3 - s^* i^* \omega \\ Kecx^* s^* \omega \sin \omega \tau &= ax^* \omega^2 - ax^* s^* i^* \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将式 (9) 的两边分别平方相加得

$$\omega^6 + [(ax^*)^2 - 2s^* i^*] \omega^4 + [(s^* i^*)^2 - 2(ax^*)^2 s^* i^* - (Kecx^* s^*)^2] \omega^2 + (ax^* s^* i^*)^2 = 0 \quad (10)$$

由定理条件 $e < e_0 \leq e^* + \frac{a(a - cd_2)}{2Kd_2}$ 及式 (4), 知式 (10) 中 ω^4 前系数

$$(ax^*)^2 - 2s^* i^* = (a - cd_2) \left[(a - cd_2) - \frac{2Kd_2}{a} (e - e^*) \right] > 0 \quad (11)$$

因此, 由定理条件及根与系数的关系可知, 存在唯一正的 ω_0 满足式 (10), 即式 (7) 有一对形如 $\pm \omega_0$ 的纯虚根, 由 (9) 式的第二个等式可知, 相应于 ω_0 的 τ_{0n} 为

$$\tau_{0n} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{a(\omega_0^2 - s^* i^*)}{Kces^* \omega_0} + \frac{2n\pi}{\omega_0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因当 $\tau = 0$ 时, E^* 是稳定的. 由 Butler 的引理^[6]知, 当 $\tau < \tau_0$ 时, E^* 仍然保持稳定, 这里 $\tau_0 = \tau_{0n} (n = 0)$. 下面要证明

$$\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_0, \omega = \omega_0} > 0$$

这将显示当 $\tau > \tau_0$ 时至少存在一个具有正实部的特征根, 则系统 (2) 满足 Hopf 分支定理^[7]的条件, 从而在 E^* 的附近分支出周期解.

事实上, 关于 τ 对式 (7) 进行微分得

$$[3\lambda^2 + 2ax^* \lambda + s^* i^* + Kecx^* s^* e^{-\lambda\tau} - Kecx^* s^* \lambda \tau e^{-\lambda\tau}] \frac{d\lambda}{d\tau} = Kecx^* s^* \lambda^2 e^{-\lambda\tau} \quad (12)$$

则由式 (7) 可将式 (12) 简化为

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{3\lambda^2 + 2ax^* \lambda + s^* i^* + Kecx^* s^* e^{-\lambda\tau} - Kecx^* s^* \lambda \tau e^{-\lambda\tau}}{Kecx^* s^* \lambda^2 e^{-\lambda\tau}} = \frac{3\lambda^2 + 2ax^* \lambda + s^* i^*}{-\lambda[\lambda^3 + ax^* \lambda^2 + s^* i^* (\lambda + ax^*)]} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\tau}{\lambda}$$

因此

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \left\{ \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda = \omega_0} &= \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right\} \right\}_{\lambda = \omega_0} = \\ &= \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{3\lambda^2 + 2ax^* \lambda + s^* i^*}{-\lambda[\lambda^3 + ax^* \lambda^2 + s^* i^* (\lambda + ax^*)]} - \frac{1}{\omega_0^2} \right] \right\} = \\ &= \operatorname{sign} \left\{ \frac{2\omega_0^4 + (ax^*)^2 \omega_0^2 + (ax^*)^2 s^* i^*}{\omega_0^2 [\omega_0^2 + (ax^*)^2] (\omega_0^2 - s^* i^*)} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

由式 (11) 及根与系数的关系可知 $\omega_0^2 - s^* i^* > 0$, 则式 (13) 大于零, 所以

$$\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_0, \omega = \omega_0} > 0$$

因此, Hopf 分支在 $\omega = \omega_0, \tau = \tau_0$ 时发生.

1.3 全局稳定性

定理 4 如果 $\sigma < 1$, 则边界平衡点 E_1 是全局渐近稳定的.

证明: 已知当 $\sigma < 1$ 时, E_1 是局部渐近稳定的.

由系统 (2) 的第一个方程得

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x) - cxs \leq ax(1 - x)$$

再由比较定理^[8]知

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq 1$$

由系统 (2) 的第二个方程得

$$\frac{ds}{dt} = Kex(t - \tau)s - d_1 s - si \leq (Ke - d_1)s$$

再由比较定理知, 当 $\sigma < 1$ 时, 有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq 0$, 即得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0 \quad (14)$$

从而对任意的 $0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{a}{2c}, \frac{d_2}{2} \right\}$, 当 t 充分大时, 有

$$-\varepsilon < s(t) < \varepsilon \quad (15)$$

由系统 (2) 的第一个方程及式 (15) 得

$$\frac{dx}{dt} > ax \left(1 - x - \frac{c}{a} \varepsilon \right)$$

再由比较定理得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq 1$, 即得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 \quad (16)$$

同理, 对系统 (2) 的第三个方程有

$$\frac{di}{dt} \leq (\varepsilon - d_2) i$$

再由比较定理得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} i(t) \leq 0$, 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \quad (17)$$

由上面 (14)、(16)、(17) 式知, $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), s(t), i(t)) = (1, 0, 0)$. 所以, E_1 是全局渐近稳定的.

2 结 语

本文分析了具有消化时滞的两种群生态——流行病模型, 讨论了模型边界平衡点的性质和全局稳定性, 并给出了疾病是否流行的阈值 R_0 . 证明了当时滞 τ 适当小时, 正平衡点是局部渐近稳定的, 随着时滞的增加, 正平衡点由稳定变为不稳定, 系统在正平衡点附近发生 Hopf 分支. 因此, 得到了具有

时滞的捕食过程影响流行病模型的动力学性质.

参 考 文 献:

- [1] 孙树林, 原存德. 捕食者具有流行病的捕食 - 被捕食 (SD) 模型的分析 [J]. 生物数学学报, 2006, 20(1): 97 - 104.
- [2] 孙树林, 原存德. 捕食者有病的生态——流行病 SIS 模型的分析 [J]. 工程数学学报, 2005, 22(1): 30 - 34.
- [3] 张江山, 孙树林. 捕食者有病的生态——流行病模型的分析 [J]. 生物数学学报, 2005, 20(2): 157 - 167.
- [4] 宋新宇, 肖燕妮, 陈兰荪. 具有时滞的生态——流行病模型的稳定性和 Hopf 分支 [J]. 数学物理学报, 2005, 25(A1): 57 - 66.
- [5] 卢金梅, 王 霞. 双时滞种群 - 传染病模型的稳定性分析 [J]. 郑州轻工业学院学报: 自然科学版, 2006, 21(4): 95 - 99.
- [6] FREEDMAN H I, SREE H R V. The Trade-off Between Mutual Interference and Time Lags in Predator-prey Systems [J]. Bull-Math Biol, 1983, 45: 991 - 1003.
- [7] HALE J K. Theory of Functional Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [8] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001: 12 - 14.

(编辑: 温泽宇)

(上接第 88 页)

充分长时间中几乎可以使所有的有机分子被氧化, 氧化降解可以使泥炭腐植酸分子全部降解为小分子, 甚至被继续氧化至二氧化碳. 所以泥炭腐植酸的硝化反应必须根据性能要求选择适当的硝化条件. 而且泥炭硝基腐植酸对植物生长的刺激作用与其醌基含量有关. 所以在制备植物生长促进剂时就要控制硝化条件, 以保证产物中醌基质量分数最高.

4 结 论

1) 腐植酸硝化反应的产率随硝酸浓度的增加、反应时间的延长而降低, E_4/E_6 值则增加, 说明硝化过程中存在着腐植酸分子的氧化降解反应.

2) 硝基腐植酸中硝态氮含量的增加证实了硝化反应的存在, 硝态氮含量存在最大值则说明硝化反应主要发生在腐植酸分子中的芳核上.

3) 在所用的硝化条件下无腐植酸硝酸酯生成.

参 考 文 献:

- [1] 李文光. 优质矿物肥料泥炭在农业上的利用与研究 [J]. 化工矿产地质, 2002, 6: 115.
- [2] CHEN S, NSKEEPW P, WILLIAMS S A, et al. Complexation of 1-naphthol by Humic and Fulvic Acids [J]. Soil Science Society of America Journal, 1992, 56: 67 - 73.
- [3] 李克斌, 王琪全, 刘维屏. 除草剂苯达松与腐植酸作用机理的研究 [J]. 上海环境科学, 1998, 17(5): 18 - 20.
- [4] 陈晓玲. 巢湖泥炭中腐植酸的提取工艺 [J]. 淮南矿业学院学报, 1998, 18(2): 61 - 64.
- [5] REBECCA S, GARRISM S. Molecular Structure in Soil Humic Substances: The New View [J]. Environmental Science and Technology, 2005, 39(23): 9910 - 9915.

(编辑: 付长纓)